全品
教辅图书 功能学具 学生之家
基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

进阶手册

JINJIESHOUCE

知识 · 易错 · 拓展

主 编 肖德好

高中数学

必修第一册 RJA

CONTENTS 目录

进阶手册

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

层级1　知识易错易混

【知识导图】

元素与集合
- 元素特征——确定性、无序性、互异性
- 集合与元素的关系——属于$\in$和不属于$\notin$
- 集合表示方法——列举法、描述法、图示法
- 常见数集——

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$)	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

- 解题常用思路
  - 明确集合中的元素是什么，例如数集、点集等
  - 求参数时要检验集合元素的互异性

【易错易混】识别集合的含义

(1)看代表元素.

例如:单元素集$\{0\}$,数集$\{x|p(x)\}$,点集$\{(x,y)|p(x,y)\}$.

(2)看条件.

例如:$\{y|y=x^2-4\}$表示二次函数$y=x^2-4$的函数值y组成的集合;$\{x|y=x^2-4,y<0\}$表示二次函数$y=x^2-4<0$的自变量x组成的集合;$\{(x,y)|y=x^2-4\}$表示二次函数$y=x^2-4$的图象上的点组成的集合.

例1　(1)下列集合中恰有2个元素的是　(　　)

A. $\{x^2-x=0\}$　　B. $\{y|y^2-y=0\}$

C. $\{x|y=x^2-x\}$　　D. $\{y|y=x^2-x\}$

(2)下列集合表示同一集合的是　(　　)

A. $M=\{(2,3)\},N=\{(3,2)\}$

B. $M=\{2,3\},N=\{3,2\}$

C. $M=\{(x,y)|y=x+1\},N=\{y|y=x+1\}$

D. $M=\{y|y=x+1\},N=\{y|y=x^2+1\}$

【答案】(1)B　(2)B

【解析】(1)显然A选项中集合只有一个元素;B选项中集合有两个元素,分别是0和1;C选项中集合的元素的公共属性是函数的定义域,有无数个元素;D选项中集合的元素的公共属性是函数的值域,有无数个元素.故选B.

(2)对于A选项,有序数对(2,3)与(3,2)不相同,所以集合M与集合N不是同一集合,故A错误;对于B选项,因为集合中的元素具有无序性,所以集合M与集合N是同一集合,故B正确;对于C选项,$M=\{(x,y)|y=x+1\}$是点集,而$N=\{y|y=x+1\}$是数集,所以集合M与集合N不是同一集合,故C错误;对于D选项,$M=\{y|y=x+1\}=\mathbf{R}$,$N=\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant1\}$,所以集合$M$与集合$N$不是同一集合,故D错误.故选B.

层级2　解题方法拓展

【方法解读】分类讨论之集合元素求参

例2　(1)若集合中的三个元素分别为$2,x,x^2-x$,则元素x应满足的条件是____________.

(2)已知集合 $A=\{0,m,m^2-3m+2\}$，且 $2\in A$，则实数 m 的值为________.

(3)已知集合 $A=\left\{0,a+b,\frac{a}{b}\right\}$，$B=\{0,1-b,1\}(a,b\in\mathbf{R})$，若 $A=B$，则 $a+2b=$________.

【答案】(1)$x\neq2$ 且 $x\neq-1$ 且 $x\neq0$　(2)3　(3)1

【解析】(1)由集合中元素的互异性，可知 $\begin{cases}x\neq2,\\x^2-x\neq2,\\x^2-x\neq x,\end{cases}$ 解得 $x\neq2$ 且 $x\neq-1$ 且 $x\neq0$.

(2)若 $m=2$，则 $m^2-3m+2=0$，不满足集合元素的互异性，舍去；若 $m^2-3m+2=2$，解得 $m=3$ 或 $m=0$，其中 $m=0$ 不满足集合元素的互异性，舍去. 故 $m=3$.

(3)由题得 $b\neq0$. 由 $A=B$，得 $\begin{cases}a+b=1,\\\frac{a}{b}=1-b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=1-b,\\\frac{a}{b}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$ 或 $a=b=\frac{1}{3}$. 当 $a=0,b=1$ 时，集合 A 中 $\frac{a}{b}=0$，与 $\frac{a}{b}\neq0$ 矛盾；当 $a=b=\frac{1}{3}$ 时，$A=B=\left\{0,\frac{2}{3},1\right\}$，符合题意. 故 $a+2b=1$.

【教材拓展】集合论

集合论是德国数学家康托尔于19世纪末创立的. 当时，康托尔在解决涉及无限量研究的数学问题时，越过"数集"限制，提出了一般性的"集合"概念. 关于集合论，希尔伯特赞誉其为"数学思想的惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一"，罗素描述其为"可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作".

例3　某高中小伟同学在学习完第一章集合后对高中数学非常感兴趣，他在图书馆查阅资料后发现在集合论中有"差集"的定义如下：$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

(1)若 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6\}$，求 $A-B$；

(2)若 $A=\{x\mid1<x<3\}$，$B=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$，求 $A-B$.

解：(1)由 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6\}$，得 $A-B=\{1,3\}$.

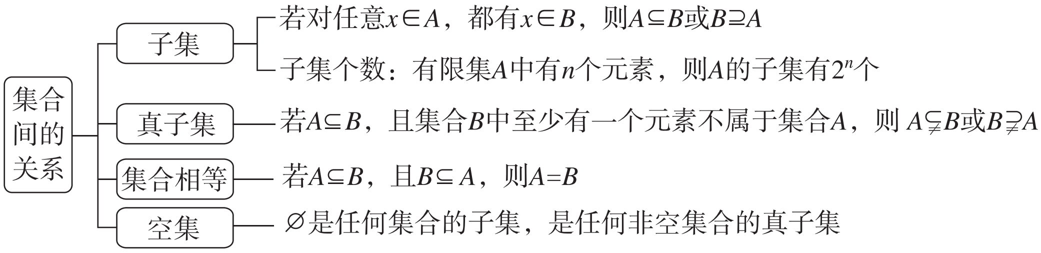
(2)由 $A=\{x\mid1<x<3\}$，$B=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$，

得 $A-B=\{x\mid1<x\leqslant2\}$.

1.2　集合间的基本关系

层级1　知识易错易混

【知识导图】



【易错易混】$\varnothing$与0，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$的关系

空集是不含任何元素的集合，且规定$\varnothing\subseteq\varnothing$，任何时候 $x\in\varnothing$ 都不成立.

$\{\varnothing\}$不是空集，$\{\varnothing\}$中含有一个元素$\varnothing$. $\varnothing$作为元素，则$\varnothing\in\{\varnothing\}$；$\varnothing$作为集合，则$\varnothing\subseteq\varnothing$.

$\{0\}$是含有一个元素0的集合，与空集不同，$0\in\{0\}$，$0\notin\varnothing$，$0\notin\{\varnothing\}$.

例1　下列关于空集的说法中错误的是　(　　)

A. $\varnothing\in\varnothing$　　B. $\varnothing\subseteq\varnothing$

C. $\varnothing\in\{\varnothing\}$　　D. $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

[答案] A

[解析] 对于 A，因为“$\in$”用于元素与集合之间，所以 A 中说法错误；对于 B，D，空集是任何集合的子集，所以 B，D 中说法正确；对于 C，因为 $\varnothing$ 是集合 $\{\varnothing\}$ 中的元素，所以 C 中说法正确. 故选 A.

层级2 解题方法拓展

【方法解读 1】分类讨论之集合关系求参

已知两集合 A,B，当 $B\subseteq A$ 时，如果 A 是一个确定的集合，而集合 B 不确定，运算时要考虑 B 为空集的情况，切不可漏掉.

例 2 已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant a\}$.

(1)若 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解：(1)由集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant a\}$，且 $A\subsetneqq B$，可得 $a\geqslant 3$，

所以实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 3\}$.

(2)由集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant a\}$，

且 $B\subseteq A$，得当 $B=\varnothing$ 时，$a<1$，满足题意；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}a\geqslant 1,\\a<3,\end{cases}$ 所以 $1\leqslant a<3$.

综上可知，$a<3$，即实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a<3\}$.

【方法解读 2】集合子集与真子集个数

求集合子集的个数时，可根据集合中元素的个数来计算，因为集合中有 n 个元素，且每个元素都有两种可能，即在子集中或不在子集中，所以子集有 2^n 个，真子集和非空子集各有 (2^n-1) 个，非空真子集有 (2^n-2) 个.

例 3 满足关系 $\{1,2,3\}\subseteq A\subsetneqq\{0,1,2,3,4,5\}$ 的集合 A 的个数为________.

[答案] 7

[解析] 方法一(列举法)：满足条件的集合 A 可以是 $\{1,2,3\}$，$\{0,1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,5\}$，$\{0,1,2,3,4\}$，$\{0,1,2,3,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$，共 7 个.

方法二(计数法)：由题意得，集合 A 中一定含有 1,2,3，可能含有 0,4,5，但不同时含有 0,4,5，所以集合 A 的个数为 $2^3-1=7$.

【教材拓展】强基固本

例 4 (多选题)有 k 个水果，三个三个取剩余两个，五个五个取剩余三个，七个七个取剩余两个，则 (   )

A. 若 $k<100$，则 k 的值唯一确定

B. 若 $100<k<200$，则 k 的值唯一确定

C. 若 $100<k<300$，则 k 的值唯一确定

D. 不存在满足条件的 k 值

[答案] AB

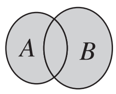
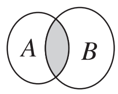
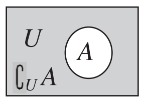
[解析] 因为有 k 个水果，三个三个取剩余两个，五个五个取剩余三个，七个七个取剩余两个，所以 $k-2$ 是 21 的倍数，$k-3$ 是 5 的倍数，所以令 $k-2=21m(m\in\mathbf{N}^*)$，则 $k-3=21m-1$. 显然，当 $m=1$ 时，满足 $k-3$ 是 5 的倍数，所以 $k=23$ 是 k 的其中一个取值，又 $3\times5\times7=105$，所以 $k=23+105n(n\in\mathbf{N})$. 对于 A，当 $k<100$ 时，k 可以唯一确定，此时 $k=23$，故 A 正确；对于 B，当 $100<k<200$ 时，k 可以唯一确定，此时 $k=128$，故 B 正确；对于 C，当 $100<k<300$ 时，$k=128$ 或 $k=233$，故 C 错误；对于 D，由选项 A，B，C 可知，D 错误. 故选 AB.

1.3 集合的基本运算

层级1 知识易错易混

【知识导图】

- 集合的运算
  - 交集
    - $A\cap B=\{x|x\in A，且x\in B\}$
    - 两个集合的共同元素
  - 并集
    - $A\cup B=\{x|x\in A，或x\in B\}$
    - 两个集合的所有元素，重复的写一遍
  - 补集
    - 若全集为U，则集合A的补集为$\complement_U A=\{x|x\in U，且x\notin A\}$
    - 在集合U中找出集合A中没有的元素

	集合的并集	集合的交集	集合的补集
符号表示	$A\cup B$	$A\cap B$	$\complement_U A$
图形表示			
集合表示	$\{x|x\in A，或x\in B\}$	$\{x|x\in A，且x\in B\}$	$\{x|x\in U，且x\notin A\}$

【易错易混】集合运算中忽略对空集的讨论

例 1 设集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|1-m<x<2m-2\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围.

解：因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$.

①当 $B=\varnothing$ 时，$1-m\geqslant 2m-2$，解得 $m\leqslant 1$；

②当 $B\neq\varnothing$ 时，由题得$\begin{cases}1-m<2m-2,\\-2\leqslant 1-m,\\2m-2\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $1<m\leqslant\frac{3}{2}$.

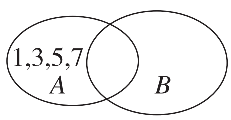
综上，实数 m 的取值范围是$\left\{m\middle|m\leqslant\frac{3}{2}\right\}$.

层级2 解题方法拓展

【方法解读】数形结合和正难则反

例 2 已知全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}|0\leqslant x\leqslant 10\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5,7\}$，求集合 B.

解：因为 $A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5,7\}$，



所以 $1,3,5,7\in A$，$1,3,5,7\in\complement_U B$，

所以 $1,3,5,7\notin B$.

$U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}|0\leqslant x\leqslant 10\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

作出 Venn 图，如图，由图可知 $B=\{0,2,4,6,8,9,10\}$.

例 3 已知集合 $A=\{x \mid -4\leqslant x\leqslant -2\}$，集合 $B=\{x \mid x-a\geqslant 0\}$，若全集 $U=\mathbf{R}$，且 $A\subseteq \complement_U B$，则 a 的取值范围为________.

[答案] $\{a \mid a>-2\}$

[解析] 由题意，$\complement_U B=\{x \mid x<a\}$，因为 $A\subseteq \complement_U B$，所以 $a>-2$，故 a 的取值范围为$\{a \mid a>-2\}$.

例 4 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x \mid m\leqslant x\leqslant m+2\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 m 的取值范围为____________.

[答案] $\{m \mid -2\leqslant m\leqslant 4\}$

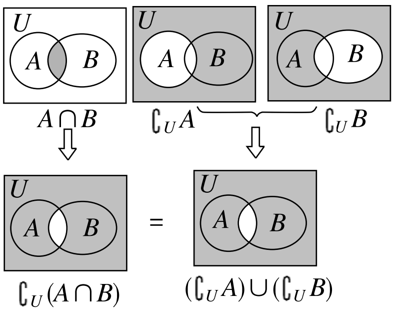
[解析] 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $m+2<0$ 或 $m>4$，解得 $m<-2$ 或 $m>4$，故当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，实数 m 的取值范围为 $\{m \mid -2\leqslant m\leqslant 4\}$.

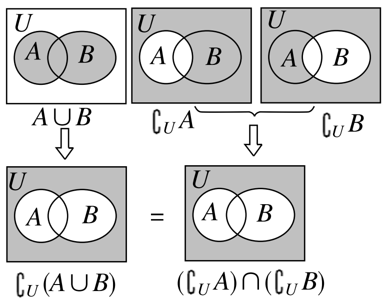
【教材拓展】德 · 摩根定律和容斥原理

1. 德 • 摩根定律

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

该法则可借助 Venn 图帮助理解.





2. 容斥原理

在研究集合时，经常遇到有关集合中元素的个数问题. 我们把含有有限个元素的集合 A 叫作有限集，用 card(A)表示有限集合 A 中元素的个数. 例如 $A=\{a,b,c\}$，则 card$(A)=3$. 把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法称为容斥原理.

(1)两个有限集的容斥原理：一般地，对于两个有限集 A，B，我们有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$；

(2)三个有限集的容斥原理：一般地，对于三个有限集 A，B，C，我们有 $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(C\cap A)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

例 5 [教材 P35T11] 学校举办运动会时，高一(1)班共有 28 名同学参加比赛，有 15 人参加游泳比赛，有 8 人参加田径比赛，有 14 人参加球类比赛，同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人，同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人，没有人同时参加三项比赛. 同时参加田径和球类比赛的有多少人？只参加游泳一项比赛的有多少人？

解： 设同时参加田径和球类比赛的有 x 人，则 $28=15+8+14-3-3-x$，解得 $x=3$，

即同时参加田径和球类比赛的有 3 人，

只参加游泳一项比赛的有 $15-3-3=9$(人).

1.4　充分条件与必要条件

层级1　知识易错易混

【知识导图】

充分、必要条件
- 命题
  - 可以判断真假的陈述句
  - 真命题：判断为真的为真命题；假命题：判断为假的为假命题
- 充分、必要条件与集合的关系

条件	定义法	集合法：$A=\{x\|p(x)\}, B=\{x\|q(x)\}$
p是q的充分条件	$p\Rightarrow q$	$A\subseteq B$
p是q的必要条件	$q\Rightarrow p$	$A\supseteq B$
p是q的充要条件	$p\Rightarrow q$且$q\Rightarrow p$	$A=B$
p是q的充分不必要条件	$p\Rightarrow q$且$q\nRightarrow p$	$A\subsetneqq B$
p是q的必要不充分条件	$p\nRightarrow q$且$q\Rightarrow p$	$A\supsetneqq B$
p是q的既不充分也不必要条件	$p\nRightarrow q$且$q\nRightarrow p$	A不包含于B且B不包含于A

- 注意——小范围可以推出大范围，大范围不可以推出小范围

【易错易混】混淆充分条件与必要条件

(1)若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件,所谓“充分”,即要使 q 成立,有 p 成立就足够了;q 是 p 的必要条件,所谓“必要”,即 q 是 p 成立的必不可少的条件,缺其不可.

(2)对于充要条件,要熟悉它的同义词语.“p 是 q 的充要条件”可以说成“p 与 q 是等价的”“q 成立当且仅当 p 成立”“q 成立必须且只需 p 成立”等.

例 1　使“$x\leqslant-\frac{1}{2}$或 $x\geqslant3$”成立的一个充分不必要条件是　　(　　)

A. $x<0$　　B. $x\geqslant0$

C. $x\in\{-1, 3, 5\}$　　D. $x\leqslant-\frac{1}{2}$或 $x\geqslant3$

[答案] C

[解析] 对于 A,由 $x<0$ 不能推出 $x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{2}$,反之也不能,则“$x<0$”是“$x\leqslant-\frac{1}{2}$或 $x\geqslant3$”的既不充分也不必要条件;对于 B,由 $x\geqslant0$ 不能推出 $x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{2}$,反之也不能,则“$x\geqslant0$”是“$x\leqslant-\frac{1}{2}$或 $x\geqslant3$”的既不充分也不必要条件;对于 C,由 $x\in\{-1,3,5\}$可以推出 $x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{2}$,反之不能,则“$x\in\{-1,3,5\}$”是“$x\leqslant-\frac{1}{2}$或 $x\geqslant3$”的充分不必要条件;对于 D,“$x\leqslant-\frac{1}{2}$或 $x\geqslant3$”是“$x\leqslant-\frac{1}{2}$或 $x\geqslant3$”的充要条件. 故选 C.

层级2　解题方法拓展

【方法解读】充分条件、必要条件的判断方法

定义法:①确定条件 p 是什么,结论 q 是什么;

②尝试由条件 p 推结论 q,由结论 q 推条件 p;

③确定条件 p 和结论 q 的关系.

若 $p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件;若 $p\nRightarrow q$,$q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要不充分条件;若 $p\Rightarrow q$,$q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件;若 $p\nRightarrow q$,$q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

传递法：若 p 是 q 的充分条件，q 是 s 的充分条件，即 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow s$，则有 $p\Rightarrow s$，即 p 是 s 的充分条件；

若 p 是 q 的必要条件，q 是 s 的必要条件，即 $q\Rightarrow p$，$s\Rightarrow q$，则 $s\Rightarrow p$，即 p 是 s 的必要条件；

若 p 是 q 的充要条件，q 是 s 的充要条件，即 $p\Leftrightarrow q$，$q\Leftrightarrow s$，则 $p\Leftrightarrow s$，即 p 是 s 的充要条件.

集合法：对于带有否定性的命题或比较难判断的命题，常借助集合思想把抽象、复杂问题形象化，直观化.

用集合法判断时，要尽可能用 Venn 图、数轴、直角坐标系等辅助解题，图形的形象、直观能简化解题过程，降低思维难度.

例 2 已知 $p:x>0,y>0$，$q:xy>0$，则 q 是 p 的 （　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[答案] B

[解析] 由 $x>0,y>0$，可得 $xy>0$，但若 $xy>0$，不一定可得 $x>0,y>0$，也可能 $x<0,y<0$. 所以 $p\Rightarrow q$，但 $q\nRightarrow p$，所以 q 是 p 的必要条件. 故选 B.

例 3 "$x>-1$"是"$x>1$"的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[答案] B

[解析] 因为 $\{x|x>1\}\subsetneqq\{x|x>-1\}$，所以"$x>-1$"是"$x>1$"的必要不充分条件. 故选 B.

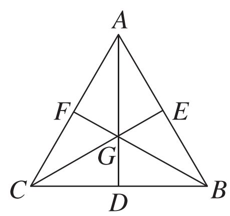
例 4 请写出一个条件，使得 $x>0$ 是它的一个必要不充分条件________.

[答案] $x>1$（答案不唯一）

[解析] 因为 $x>0$ 不能推出 $x>1$，而 $x>1$ 能推出 $x>0$，所以 $x>0$ 是 $x>1$ 的必要不充分条件.

【教材拓展】强基固本

例 5 条件 p：$\triangle ABC$ 的内心与外心重合，条件 q：$\triangle ABC$ 是正三角形，则 p 是 q 的什么条件？



证明： 充分性：如图，设点 G 既是 $\triangle ABC$ 的外心，也是 $\triangle ABC$ 的内心，

D,E,F 分别是 BC,AB,AC 的中点，

则 $\begin{cases}AG=CG,\\FG=FG,\\AF=CF,\end{cases}$ 则 $\triangle AGF\cong\triangle CGF$，

所以 $\angle GAF=\angle GCF$，

由 AG,CG 是角平分线得 $\angle CAB=\angle ACB$，同理可得 $\angle CAB=\angle CBA$，

则 $\angle CAB=\angle ACB=\angle CBA$，

即 $\triangle ABC$ 是正三角形；

必要性：当 $\triangle ABC$ 是正三角形时，角平分线所在直线和三角形的边的中垂线所在直线重合，

则其内心和外心重合.

所以 p 是 q 的充要条件.

1.5　全称量词与存在量词

层级1　知识易错易混

【知识导图】

- 全称量词与存在量词
  - 全称量词与全称量词命题
    - 全称量词：短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作全称量词
    - 符号表示：全称量词命题“对M中的任意一个x，$p(x)$成立”可用符号简记为“$\forall x\in M$，$p(x)$”
  - 存在量词与存在量词命题
    - 存在量词：短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作存在量词
    - 符号表示：存在量词命题“存在M中的元素x，$p(x)$成立”可用符号简记为“$\exists x\in M$，$p(x)$”
  - 全称量词命题与存在量词命题的否定
    - 全称量词命题：$\forall x\in A$，$p(x)$，其否定为：$\exists x\in A$，$\neg p(x)$
    - 存在量词命题：$\exists x\in A$，$p(x)$，其否定为：$\forall x\in A$，$\neg p(x)$
  - 关于ax^2+bx+c的不等式
    - $a=0\Rightarrow$代入计算
    - $a\neq 0$
      - $x\in\mathbf{R}$
        - $\forall$(恒成立)：开口、Δ
        - $\exists$(存在)：分离参数与无参函数的最值
      - $x\notin\mathbf{R}$：分离参数法
        - 参数与无参函数的最值问题
        - $\forall$：大于最大，小于最小
        - $\exists$：大于最小，小于最大

【易错易混】全称量词命题和存在量词命题的判断

全称量词命题是陈述某集合中的所有元素都具有(不具有)某种性质的命题，无一例外，其强调整体和全部；存在量词命题是陈述某集合中有(存在)元素具有(不具有)某种性质的命题，强调个别和部分的特殊性.

层级2　解题方法拓展

【方法解读】恒成立(存在性)问题求参

全称量词“$\forall$”表示任意一个，指的是在指定范围内的恒成立问题，而存在量词“$\exists$”表示存在一个，指的是在指定范围内的有解问题，求参数取值范围是一类重要的题型，通常利用分离参数法或判别式法求解.

例1　已知p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+a\geqslant 0$，q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2ax+1=0$. 若p和q都是真命题，则实数a的取值范围为　　(　　)

A. $\{a\mid a\leqslant -1$或$a=1\}$　　B. $\{a\mid a\leqslant -1$或$1\leqslant a\leqslant 2\}$

C. $\{a\mid a\geqslant 1\}$　　D. $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$

[答案] C

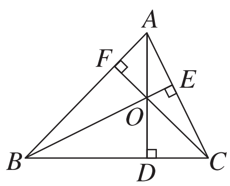
[解析] 已知p为真命题，且$y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$，当$x=-1$时，y取得最小值$a-1$，则$a-1\geqslant 0$，所以$a\geqslant 1$. 已知q为真命题，即$x^2+2ax+1=0$有实根，则$\Delta=(2a)^2-4\times1\times1\geqslant 0$，即$4a^2-4\geqslant 0$，解得$a\leqslant -1$或$a\geqslant 1$. 因为$p$和$q$都是真命题，所以$a\geqslant 1$，即实数$a$的取值范围为$\{a\mid a\geqslant 1\}$. 故选C.

【教材拓展】根据事实写命题

例2 [教材P35T12] 根据下述事实，分别写出含有量词的全称量词命题或存在量词命题：

(1)$1=1^2$，$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，$1+3+5+7=4^2$，$1+3+5+7+9=5^2$……

(2)如图，在$\triangle ABC$中，AD，BE与CF分别为BC，AC与AB边上的高，则AD，BE与CF所在的直线交于一点O.



解：(1)$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

(2)任意三角形的三条高交于一点.